Лекция 4

Тема лекции:
Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли

Цель лекции:
Сформировать у студентов понимание методов решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнений, сводящихся к однородным, линейных уравнений первого порядка, а также уравнений Бернулли и способов их преобразования.

Основные вопросы:

1. **Определение однородного дифференциального уравнения первого порядка.**
2. **Метод решения однородных уравнений с помощью замены $y = ux$.**
3. **Уравнения, приводящиеся к однородным (линейные сдвиги переменных).**
4. **Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка и метод integrating factor (метод множителя).**
5. **Уравнение Бернулли и его сведение к линейному виду.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f(x;\, y)$ называется однородной функцией n-го измерения, если для любого λ выполняется равенство

$$f(\lambda_x;\lambda_y) = \lambda^n \cdot f(x;y)$$

Пример:

$$f(x;y) = \sqrt{x^2 \cdot y^2 + 2y^4} \quad - \quad \text{однородная второго порядка (измерения)}$$

$$f(\lambda_x;\lambda_y) = \sqrt{\lambda^2 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 \cdot y^2 + 2\lambda^4 \cdot y^4} = \lambda^2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot y^2 + 2y^4} = \lambda^2(x;y)$$

Пример:

$$f(x;y) = \frac{x-y}{x+y} \quad - \quad \text{однородная функция нулевого измерения}$$

$$f(\lambda_x;\lambda_y) = f(x;y)$$

Утверждение 1:

Если $f(x;\, y)$ – однородная функция нулевого измерения, то она является функцией аргумента $\dfrac{y}{x}$, т.е. $f(x;y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Доказательство:

По условию это функция нулевого измерения, значит $f(\lambda_x;\lambda_y) = f(x;y)$, λ – любое.

Выберем $\lambda = \dfrac{1}{x}$, получим: $f\left(1;\dfrac{y}{x}\right) = f(x;y)$,

таким образом, получается $f(x;y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, что требовалось доказать.

Утверждение 2:

Если функция $M(x;y)$ и функция $N(x;y)$ однородные функции одного измерения, то их отношение есть однородная функция нулевого измерения.

$$\frac{M(x;y)}{N(x;y)} \quad - \quad \text{однородная функция нулевого измерения}$$

Доказательство:

$$M(\lambda_x;\lambda_y) = \lambda^n \cdot M(x;y), \qquad N(\lambda_x;\lambda_y) = \lambda^n \cdot N(x;y)$$

$$\frac{M(\lambda_x;\lambda_y)}{N(\lambda_x;\lambda_y)} = \frac{\lambda^n \cdot M(x;y)}{\lambda^n \cdot N(x;y)} = \frac{M(x;y)}{N(x;y)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Уравнение $y' = f(x;y)$, где $f(x;y)$ – однородная функция нулевого измерения, называется однородным уравнением первого порядка.

Проверка однородности:

1) По определению $f(\lambda_x;\lambda_y) = f(x;y)$
2) По утверждению 1 $f(x;y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$
3) $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$

$M(x;y)dx,\ N(x;y)dx$ – однородные функции одного измерения (y $\rightleftarrows$ тверждение 2).

Решение однородных уравнений первого порядка.

1) $u = \frac{y}{x}, \qquad y = u \cdot x, \qquad y' = u' \cdot x + u \cdot x' = u' \cdot x + u$

2) Получаем уравнение:

$u' \cdot x + u = \varphi(u)$ – уравнениес разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \varphi(u) - u, \qquad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

3) Обратная замена $u = \frac{y}{x}$.

Пример:

$$x \cdot y' - y = x \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{x}$$

$$x \cdot y' = x \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{x} + y \quad (\text{разделим на } x)$$

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}, \qquad y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \text{уравнениеоднородное}$$

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y' = u' \cdot x + u$$

$$u' \cdot x + u = u + \operatorname{tg} u, \qquad \frac{du}{dx} \cdot x = \operatorname{tg} u, \qquad \operatorname{ctg} u\, du = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\sin u = c \cdot x, \qquad \underline{\sin\frac{y}{x} = c \cdot x}$$

Пример:

$$x^2dy+\left(y^2-2x\cdot y\right)dx=0$$

Докажем однородность:

$$\left.\begin{aligned}M(x;y)&=x^2\\N(x;y)&=y^2-2x\cdot y\end{aligned}\right\}\text{ однородные функции второго измерения, следовательно, уравнения однородные}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$x^2dy=\left(2x\cdot y-y^2\right)dx \qquad \left(\text{разделим на } x^2dx\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\cdot y-y^2}{x^2}, \qquad y'=\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2} \quad - \quad \text{уравнение однородное}$$

$$u=\frac{y}{x}, \qquad y'=u'\cdot x+u$$

$$u'\cdot x+u=2u-u^2, \qquad u'\cdot x=u-u^2$$

$$\frac{du}{u-u^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{u\cdot(1-u)}=\int\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{1-u}\right)du=\left|\begin{matrix}A-A\cdot u+B\cdot u=1\\B-A=0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}A=1\\B=1\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u}-\int\frac{du}{u-1}=$$

$$=\ln|u|-\ln|u-1|$$

$$\ln|u|-\ln|u-1|=\ln|x|-\ln c$$

$$\frac{u}{u-1}=c\cdot x$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}=c\cdot x, \qquad \underline{\frac{y}{y-x}=c\cdot x}$$

Уравнения, приводимые к однородным.

$$y'=f\left(\frac{a\cdot x+b\cdot y+c}{a_1\cdot x+b_1\cdot y+c_1}\right) \qquad (*)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если $c=c_1=0$, то (*) – однородное уравнение первого порядка.

$$f\left(\frac{a\cdot x+b\cdot y}{a_1\cdot x+b_1\cdot y}\right) \quad - \quad \text{однородная функция нулевого измерения}$$

$$f\left(\frac{a\cdot\lambda\cdot x+b\cdot\lambda\cdot y}{a_1\cdot\lambda\cdot x+b_1\cdot\lambda\cdot y}\right)=f\left(\frac{a\cdot x+b\cdot y}{a_1\cdot x+b_1\cdot y}\right)$$

Пусть $c\neq 0$ *и (или)* $c_1\neq 0$

$x=t+h, \qquad y=v+k$

t, v – переменные; h, k – const

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(v+k)'\,dv}{(t+h)'\,dt}=\frac{dv}{dt}$$

$$(*) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}=f\left(\frac{a\cdot t+a\cdot h+b\cdot v+b\cdot k+c}{a_1\cdot t+a_1\cdot h+b_1\cdot v+b_1\cdot k+c_1}\right)$$

$$\begin{cases} a\cdot h+b\cdot k+c=0 \\ a_1\cdot h+b_1\cdot k+c_1=0 \end{cases}$$

Если в качестве h и k взять решение полученной системы, то по утверждению уравнение будет однородным.

<u>*Пример*</u>:

$$(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$$

$$(x+y-3)dy=-(2x-4y+6)dx$$

$$y'=\frac{2x-4y+6}{x+y-3}$$

$x=t+h, \quad y=v+k,$ тогда получим уравнение:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{2t+2h-4v-4k+6}{t+h+v+k-3}$$

$$\begin{cases} 2h-4k+6=0 \\ h+k-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h-2k=-3 \\ h+k=3 \end{cases} \qquad k=2, \ h=1$$

Подставим h и k, получим:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{2t-4v}{t+v}, \qquad \frac{dv}{dt}=-\frac{2-4\cdot\frac{v}{t}}{1+\frac{v}{t}}$$

$$v'=\varphi\left(\frac{v}{t}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{уравнение однородное.}$$

$u=\dfrac{v}{t}$, тогда $v'=u'\cdot t+u$

$u'\cdot t+u=-\dfrac{2-4u}{1+u}=\dfrac{4u-2}{1+u}$ – уравнениес разделяющимися переменными

$u'\cdot t=\dfrac{4u-2}{u+1}-u,\qquad u'\cdot t=\dfrac{3u-u^2-2}{1+u}$

$-\dfrac{(u+1)\,du}{u^2-3u+2}=\dfrac{dt}{t}$

$$\int\frac{(u+1)\,du}{u^2-3u+2}=\int\left(\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u-2}\right)du=\left|\begin{array}{ll} A\cdot u-2A+B\cdot u-B=u+1 & \\ \begin{cases}A+B=1 \\ -2A-B=1\end{cases} & \begin{array}{l}A=-2\\ B=3\end{array}\end{array}\right|=-2\int\frac{du}{u-1}+3\int\frac{du}{u-2}=$$

$=-2\ln|u-1|+3\ln|u-2|$

$2\ln|u-1|-3\ln|u-2|=\ln|t|+\ln|c|$

$\dfrac{(u-1)^2}{(u-2)^3}=c\cdot t$ – общее решение.

$$\frac{\left(\frac{v}{t}-1\right)^2}{\left(\frac{v}{t}-2\right)^3}=c\cdot t,\qquad \frac{(v-t)^2}{t^2}=\frac{c\cdot t\cdot(v-2t)^3}{t^3},\qquad \left(v-t^2\right)=c\cdot(v-2t)^3$$

$x=t+h=t+1,\qquad t=x-1$

$v=v+k=v+2,\qquad v=y-2$

$(y-2-x+1)^2=c\cdot(y-2-2x+2)^3$

$(y-x-1)^2=c\cdot(y-2x)^3$

Если система $\begin{cases}a\cdot h+b\cdot k+c=0\\ a_1\cdot h+b_1\cdot k+c_1=0\end{cases}$ не имеет решений, то ее определитель

$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}=0,\quad т.е.\quad a\cdot b_1-a_1\cdot b=0,$

$a\cdot b_1=a_1\cdot b,\qquad \dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=m=const$

$$\frac{a\cdot x+b\cdot y+c}{a_1\cdot x+b_1\cdot y+c_1}=\frac{m\cdot a_1\cdot x+m\cdot b_1\cdot y+c}{a_1\cdot x+b_1\cdot y+c_1}=\frac{m\cdot(a_1\cdot x+b_1\cdot y)+c}{(a_1\cdot x+b_1\cdot y)+c}$$

Если $z=a_1\cdot x+b_1\cdot y$, то получаем уравнениес разделяющимися переменными.

Пример:

$$y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$y' = \frac{2x+y+1}{2\cdot(2x+y)-3}$$

$$z = 2x+y, \qquad z' = 2+y' \quad \Rightarrow \quad y' = z'-2$$

$$z'-2 = \frac{z+1}{2z-3}, \qquad z' = \frac{z+1}{2z-3}+2 = \frac{5z-5}{2z-3}$$

$$\frac{2z-3}{5z-5}\,dz = dx$$

$$\frac{1}{5}\int\frac{2z-3}{z-1}\,dz = \frac{1}{5}\int\frac{2\cdot(z-1)-1}{z-1}\,dz = \frac{2}{5}z-\frac{1}{5}\cdot\ln|\,z-1\,|$$

$$\frac{2}{5}z-\frac{1}{5}\cdot\ln|\,z-1\,| = x+c$$

$$\frac{2}{5}\cdot(2x+y)-\frac{1}{5}\cdot\ln|\,2x+y-1\,| = x+c.$$

Линейные уравнения первого порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно y' и y. (Относительно x линейность никто не гарантирует.)

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x) \qquad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $Q(x) = 0$, то линейное уравнение называется линейным однородным уравнением.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Линейное однородное уравнение $y' + P(x)\cdot y = 0$ (2) является уравнением с разделяющимися переменными.

Доказательство:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)\cdot y, \qquad \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

ДВА СПОСОБА РЕШЕНИЯ

1) Чтобы решить уравнение (1) необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения (2). В полученном решении постоянную c рассматривать как функция от x, т.е. $c = c(x)$, подставить в (1) и найти c.

Пример:

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$y' = y \cdot \operatorname{tg} x = 0,$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -y \cdot \operatorname{tg} x,$ $\qquad \dfrac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x \, dx$

$\ln|\, y \,| = \ln|\cos x\,| + \ln c,$ $\qquad y = c \cdot \cos x$

Пусть $c = c(x)$, тогда $y = c(x) \cdot \cos x$

$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$

Подставим в исходное уравнение:

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$c'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x},$ $\qquad c(x) = \operatorname{tg} x + c$

$y = c(x) \cdot \cos x = (\operatorname{tg} x + c) \cdot \cos x = \sin x + c \cdot \cos x.$

2) *$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$*

Метод Бернулли.

$y = u(x) \cdot v(x)$

$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + P(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = Q(x)$

$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot \big(v'(x) + P(x) \cdot v(x)\big) = Q(x)$

$$\begin{cases} v'(x) + P(x) \cdot v(x) = 0 & \qquad (A) \\ u'(x) \cdot v(x) = Q(x) & \qquad (B) \end{cases}$$

(A) $-$ уравнениес разделяющимися переменными

$\dfrac{dv}{dx} = P(x) \cdot v,$ $\qquad \dfrac{dv}{v} = P(x)\, dx$

$\ln|\, v \,| = \int P(x)\, dx + c$

Т.к. в качестве $v(x)$ можно взять любое частное решение уравнения (A), то положим $c = 0$, тогда $v = e^{\int P(x)dx}$.

(B): $u'(x) \cdot e^{\int P(x)dx} = Q(x)$ $-$ *уравнение с разделяющимися переменными.*

$$du = Q(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} dx \quad \Rightarrow \quad u = \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} dx + c$$

$y = u(x) \cdot v(x)$

Пример:

$y' - 2x \cdot y = e^{x^2} \cdot \cos x, \qquad y(0) = 2.$

$y = u(x) \cdot v(x), \qquad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ (опускаем аргумент для краткости)

$u' \cdot v + u \cdot v' - 2x \cdot u \cdot v = e^{x^2} \cdot \cos x$

$u' \cdot v + u \cdot \left(v' - 2x \cdot v\right) = e^{x^2} \cdot \cos x$

$$\begin{cases} v' - 2x \cdot v = 0 & (A) \\ u' \cdot v = e^{x^2} \cdot \cos x & (B) \end{cases}$$

$(A): \quad \dfrac{dv}{dx} = 2x \cdot v, \qquad \dfrac{dv}{v} = 2x\,dx, \qquad \ln|v| = x^2, \qquad v = e^{x^2}.$

$(B): \quad u' \cdot e^{x^2} = e^{x^2} \cdot \cos x, \qquad du = \cos x\,dx, \qquad u = \sin x + c.$

$y = \left(\sin x + c\right) \cdot e^{x^2}$ – общее решение.

$y(0) = 2,$ *т.е.* $x_0 = 0, \ y_0 = 2 \qquad \rightarrow \qquad 2 = c$

$y = \left(\sin x + 2\right) \cdot e^{x^2}$ – частное решение.

Иногда, чтобы получить линейное уравнение, требуется поменять ролями x и y по теореме о производной обратной функции.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

<u>Пример</u>:

$$y = \left(2x + y^3\right) \cdot y'$$

$$y' = \frac{1}{x'}$$

$$y = \left(2x + y^3\right) \cdot \frac{1}{x'}, \qquad y \cdot x' = 2x + y^3$$

$$\left[x' + P(y) \cdot x = Q(y)\right]$$

$$y \cdot x' - 2x = y^3, \qquad x' - \frac{2x}{y} = y^2$$ – линейноеуравнениепервого порядка

$$x = u(y) \cdot v(y)$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{2u \cdot v}{y} = y^2, \qquad u' \cdot v + u \cdot \left(v' - \frac{2v}{y}\right) = y^2$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{y} = 0 & (A) \\ u' \cdot v = y^2 & (B) \end{cases}$$

$$(A): \quad v' = \frac{2v}{y}, \qquad \frac{dv}{dy} = \frac{2v}{y}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2\,dy}{y}$$

$$\ln|v| = 2 \cdot \ln|y|, \qquad v = y^2$$

$$(B): \quad u' \cdot y^2 = y^2$$

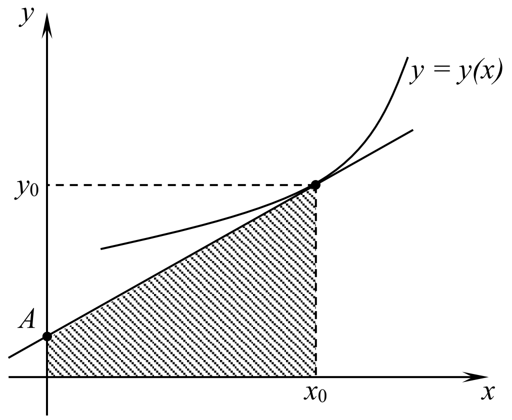
$$u' = 1$$

$$u = y + c.$$

$$\underline{x = (y + c) \cdot y^2 = y^3 + c \cdot y^2}$$

Пример:

Найти кривые, у которых площадь трапеций, ограниченных осями координат, касательной и ординатой точки касания, равна 27.



$$S_{\text{тр.}} = 27 = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

$$h = x_0, \quad b = y_0$$

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$A(0; a)$$

$$a - y_0 = y'(x_0) \cdot (-x_0) = -y'(x_0) \cdot x_0$$

$$a = y_0 - x_0 \cdot y'(x_0)$$

$$S = \frac{2y_0 - x_0 \cdot y'(x_0)}{2} \cdot x_0 = 27$$

$$2y_0 \cdot x_0 - x_0^2 \cdot y'(x_0) = 54, \qquad 2x \cdot y - x^2 \cdot y' = 54, \qquad x^2 \cdot y' - 2x \cdot y = -54$$

$$y' - \frac{2y}{x} = -\frac{54}{x^2}, \qquad y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{2u \cdot v}{x} = -\frac{54}{x^2}$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' - \frac{2v}{x} \right) = -\frac{54}{x^2}$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{x} = 0 & (A) \\ u' \cdot v = -\dfrac{54}{x^2} & (B) \end{cases}$$

(A): $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2v}{x}$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\ln|v| = 2 \cdot \ln|x|$$

$$v = x^2.$$

(B): $u' \cdot x^2 = -\dfrac{54}{x^2}$

$$u' = -54x^{-4}$$

$$u = \int -54x^{-4}\,dx = -\frac{54}{-3x^3} + c = \frac{18}{x^3} + c.$$

$$y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{18}{x^3} + c \right) \cdot x^2 = \frac{18}{x} + c \cdot x^2$$

$$\underline{y = \frac{18}{x} + c \cdot x^2}$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение однородного дифференциального уравнения первого порядка.
2. Какая замена используется при решении однородных уравнений и почему?
3. Когда дифференциальное уравнение можно привести к однородному с помощью сдвига?
4. Запишите общий вид линейного уравнения первого порядка.
5. Что такое интегрирующий множитель и как он находится?
6. Определите уравнение Бернулли и укажите метод сведения его к линейному.
7. В чем заключается отличие линейного уравнения от уравнения Бернулли?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994
2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.
7. Шипачев В.С. Высшая математика
8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.
9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.